TECHNION - ISRAEL INSTITUTE OF TECHNOLOGY
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
32000 HAIFA, ISRAEL

הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל
הפקולטה למתמטיקה
חיפה 32000

חדו"א 1מ - 104010

בחינת סוף סמסטר, אביב וקייץ, תשנ"ה - 2.10.95 - מועד ב'

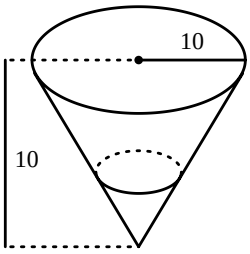
משך הבחינה שלוש שעות. אין להשתמש בחומר עזר או במחשבון. השאלון מכיל 4 עמודים. יש לרשום את התשובות הסופיות ואת הנימוקים או ההוכחות הנדרשות בגוף השאלון. את הפתרונות המלאים וחישובי העזר אפשר לרשום במחברת המצורפת. בכל מקרה, יש למסור את המחברת ביחד עם השאלון בתום הבחינה. השאלון מכיל 9 שאלות. משקלה של כל שאלה רשום ליד מספרה.

1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	

שם פרטי ומשפחה:

מספר סטודנט:

.1 *(10%)* מים זורמים לתוך מיכל קוני שגובהו 10 מטר ורדיוס בסיסו 10 מטר. ברגע t המים זורמים בקצב של $18\pi e^{-2t}$ מ"ק לשעה.



א. רשום להלן מהי כמות המים Q, שהצטברו במיכל בפרק הזמן שבין $t=0$ ל- $t=5$ (תשובה סופית בלבד):

$Q =$

ב. האם המים יגיעו בסופו של דבר לשפת המיכל? אם תשובתך חיובית, ציין במסגרת כעבור כמה שעות T הדבר יקרה (תשובה סופית בלבד):

$T =$

אם תשובתך שלילית, מצא חסם עליון מינימלי H לגובה פני המים (תשובה סופית בלבד):

$H =$

.2 *(8%)* טיל נורה אנכית. נקודת השילוח ונקודת התצפית (הקבועה) נמצאות באותו גובה מעל פני הים, ובמרחק 4 ק"מ זו מזו. כאשר הטיל מגיע לגובה 3 ק"מ, המרחק שבין נקודת התצפית לטיל משתנה בקצב של 20 קמ"ש. רשום להלן את המהירות V של הטיל באותו רגע:

$V =$

.3 *(12%)* נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x \sin 2x}{\cosh x - \cos x}$ (כאשר $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$).

א. רשום במסגרת מהו תחום ההגדרה הטבעי של f:

ב. האם ל־ f יש גבול בנקודה $x = 0$?

אם תשובתך חיובית, רשום במבסגרת מהו הגבול:

אם תשובתך שלילית, נמק להלן:

ג. האם קיימת פונקציה רציפה $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ כך ש־ $F(x) = f(x)$ לכל x בתחום ההגדרה הטבעי של f? אם תשובתך חיובית,

רשום במסגרת מהי הפונקציה F:

$F(x) =$

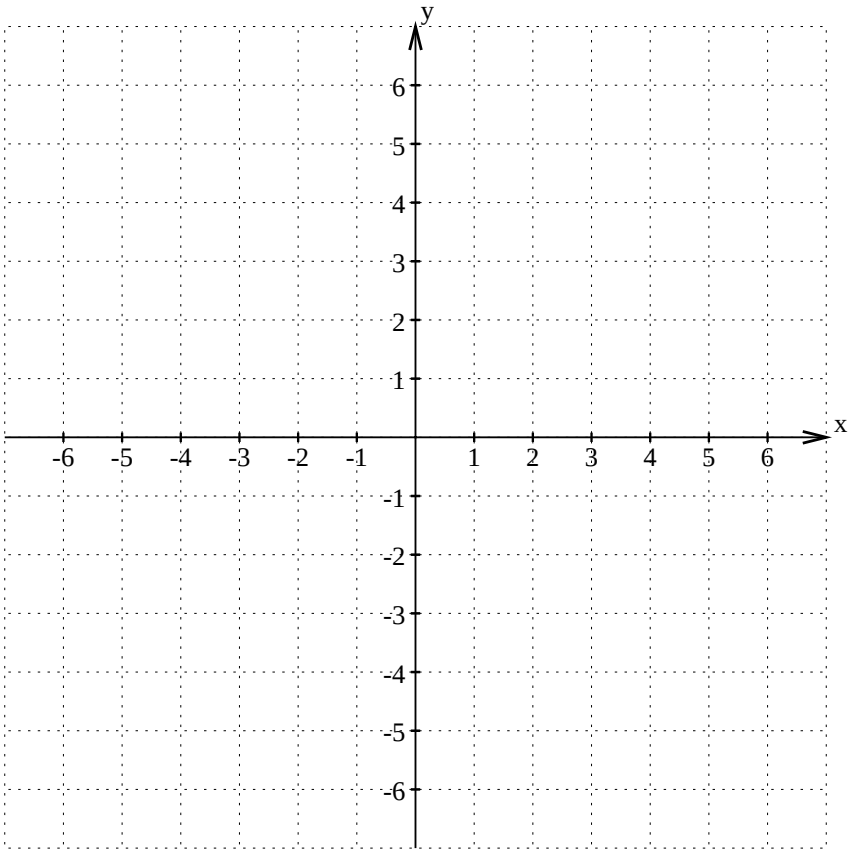
אם תשובתך שלילית, נמק להלן:

ד. האם f חסומה מלעיל? כן | לא מחק את המיותר ונמק להלן:

ה. האם f חסומה מלרע? כן | לא מחק את המיותר ונמק להלן:

ו. האם $\max f(x)$ קיים? כן | לא מחק את המיותר ונמק להלן:

4. *(12%)* א. צייר את הגרף ואת האסימפטוטות לגרף של הפונקציה $y = f(x) = \frac{x^2-4}{x+1}$. הקפד על ציון מדויק של נקודות החיתוך של הגרף ושל כל אחת מהאסימפטוטות עם צירי הקואורדינטות.



ב. רשום במסגרת מהו הקטע או הקטעים בהם הפונקציה קמורה, דהיינו קמורה כלפי מעלה:

5. *(10%)* א. על ידי שימוש במשפט טיילור (עם שארית לפי לגרנז') מצא קבועים A, B, C, D, ו־ E כך ש־ $A + Bx < (1+x)^{\frac{4}{3}} < C + Dx + Ex^2$, עבור כל $x > 0$. רשום במסגרת תשובות סופיות בלבד:

$A =$ $B =$ $C =$ $D =$ $E =$

ב. מצא את $1.02^{\frac{4}{3}}$ ברמת דיוק של 10^{-4}. רשום במסגרת תשובה סופית בלבד (כשבר עשרוני או פשוט):

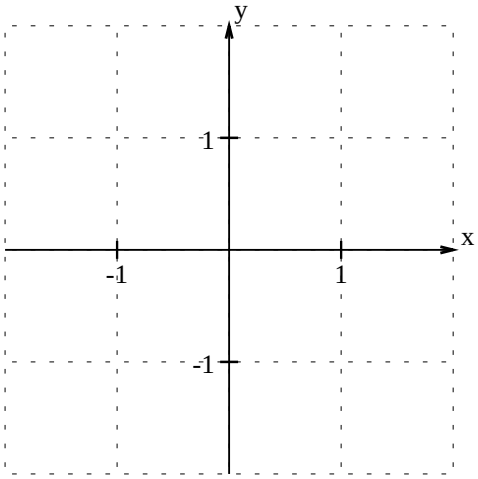
$1.02^{\frac{4}{3}} \approx$

.6 *(10%)* א. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $r = |\sin 2\theta|$, $0 \le \theta \le \pi$, במערכת שיעורים קוטבית.

ב. מצא את השטח S החסום ע"י הגרף הנ"ל.

רשום תשובה סופית במסגרת:

$S =$



.7 *(18%)* רשום להלן תשובות סופיות בלבד:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^{22} \sin x \, dx =$$

$$\lim_{x \to a} \frac{x^2}{x-a} \int_a^x e^{-t^2} \, dt =$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{2x+5}}{\sqrt{x}+5} =$$

$$\int_0^1 x^2 e^{3x} \, dx =$$

$$\int_{-2}^{-1} \frac{x^2 - 3x + 1}{x(x-1)^2} \, dx =$$

.8 *(10%)* לכל p ממשי נסמן $I_p = \int_1^2 \frac{dx}{x(x-1)^p}$.

א. האם $I_{\frac{1}{2}}$ מתכנס? אם כן, מצא את ערכו ורשום תשובה סופית במסגרת:

$I_{\frac{1}{2}} =$

אם $I_{\frac{1}{2}}$ אינו מתכנס, נמק להלן:

ב. רשום במסגרת את כל ערכי p אשר עבורם I_p מתכנס:

.9 *(10%)* נתונות הנקודות $A(1,2,-1)$ ו־ $B(-5,2,7)$, ונתון הישר L: $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-2}{3}$

א. רשום במסגרת מהו המרחק d שבין הנקודה A לישר L:

$d =$

ב. רשום במסגרת את משוואת המישור העובר דרך הנקודות A ו־ B ומקביל לישר L:

בהצלחה!